XI EMED - Encontro Mineiro de Equações Diferenciais
20 a 22 de Novembro de 2017
Poços de Caldas-MG

Equação de Difusão tempo-fracionário aplicado a ESR

J. Vanterler da C. Sousa, E. Capelas de Oliveira
L. A. Magna,
IMECC - Unicamp
FCM - Unicamp
R. Sérgio Buarque de Holanda, 651
Cidade Universitária, Campinas - SP, 13083-859
E-mail: ra160908@ime.unicamp.br, capelas@ime.unicamp.br, amagna@uol.com.br

Consideramos uma equação de difusão associada a um modelo matemático descrevendo a concentração de nutrientes no sangue que interfere diretamente na taxa de sedimentação dos eritrócitos no caso de uma velocidade média do fluido igual a zero. Introduzindo a derivada fracionária no sentido de Caputo, propomos um modelo matemático tempo-fracionário que contém, como um caso particular, o modelo proposto por Sharma et al. [2]. Nosso objetivo principal é obter uma solução analítica desta equação de difusão tempo-fracionário em termos da função de Mittag-Leffler e da função de Wright [1].

A concentração de nutrientes no sangue, denotada por $C(x,t)$, satisfaz a seguinte equação de difusão tempo-fracionário não-homogênea,

$$D_L \mathcal{D}_x^2 C\left(x,t\right) - \mathcal{D}_t^{\mu} C\left(x,t\right) = \phi\left(x,t\right), \tag{1}$$

com $0 < \mu \leq 1$, onde D_L é uma constante positiva e $\phi(x,t)$ é a função que descreve a taxa de transferência de nutrientes e que satisfaz a EDP:

$$D \mathcal{D}_x^2 \phi\left(x,t\right) - k\phi\left(x,t\right) - \mathcal{D}_t \phi\left(x,t\right) = 0, \tag{2}$$

com D e k ambas constantes positivas.

As condições inicial e de fronteira impostas aqui são dadas por

$$\begin{cases} \phi(x,0) = \exp\left(-\sqrt{\frac{k-a}{D}}x\right), & k \geq a, D > 0, \\ \phi(0,t) = \exp\left(-at\right), & t > 0, \\ \phi(\infty,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

A solução da Eq.(2) pode ser escrita como

$$\phi\left(x,t\right) = \exp\left(-\left(at+bx\right)\right),$$

onde $b^2 = \frac{(k-a)}{D} > 0$ e a é uma constante a ser escolhida a partir de um valor conhecido de $\phi\left(x,t\right)$.

Para o modelo matemático fracionário proposto, admitimos que $0 < \mu \leq 1$ e a derivada fracionária de ordem μ é considerada no sentido de Caputo [1]. O caso particular $\mu = 1$, recupera o resultado obtido por Sharma et al. [2]. Além disso, devemos impor as seguintes condições iniciais e de contorno para a Eq.(1):

$$\begin{cases} C(x,0) = 0, & x \geq 0 \\ C(0,t) = 1, & t > 0 \\ C(\infty,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{3}$$

A partir destas considerações, segue-se que o modelo matemático tempo-fracionário a ser abordado é composto por uma equação de difusão fracionária não homogênea

$$D_L \mathcal{D}_x^2 C\left(x,t\right) - \mathcal{D}_t^\mu C\left(x,t\right) = \exp\left(-\left(at+bx\right)\right), \quad a,b \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

com condições inicial e de fronteira das pela Eq.(3).

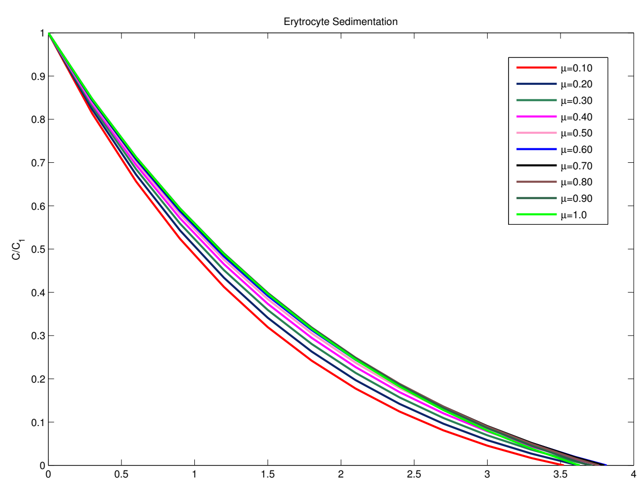
Através de métodos analíticos para soluções de EDP e outros resultados matemáticos, obtemos a solução associada ao nosso problema inicial, isto é, uma solução da Eq.(4) satisfazendo as condições dadas pela Eq.(3)

$$\begin{aligned} C\left(x,t\right) &= t^\mu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(-\alpha x t^{-\mu/2}\right)^m}{m!} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-at\right)^k \mathbb{E}_{\mu,\mu+k+1-\mu m/2}\left(\beta^2 t^\mu\right) + \\ &\quad + \mathbb{W}\left(-\mu/2, 1; -\frac{\alpha x}{t^{\mu/2}}\right) - \exp\left(-bx\right) t^\mu \sum_{k=0}^{\infty} \left(-at\right)^k \mathbb{E}_{\mu,\mu+k+1}\left(\beta^2 t^\mu\right), \end{aligned} \tag{5}$$

onde os parâmetros são dados por $\alpha^2 = 1/D_L$, $\beta^2 = b^2 D_L$ e $0 < \mu \leq 1$ e $\mathbb{W}(\cdot)$, $\mathbb{E}_{\mu,\beta}(\cdot)$ função de Wright e função de Mittag-Leffler de dois parâmetros [1].

Para plotar o gráfico da solução Eq.(5), foram utilizados os seguintes valores: coeficiente de dispersão axial $D_L = 4.8 \times 10^{-4}\mathrm{cm}^2\mathrm{s}^{-1}$; coeficiente de difusividade do oxigênio $D = 9.8 \times 10^{-5}\mathrm{cm}^2\mathrm{s}^{-1}$; coeficiente de transferência de nutrientes $k = 1.5 \times 10^{-4}\mathrm{ms}^{-1}$; $a = -0.005 \times 10^{-4}\mathrm{ms}^{-1}$. Por fim fixamos um tempo $t = 15\mathrm{s}$ e consideramos um determinado intervalo $x = [0,4]$, no qual pode ser estendido.

Figura 1: Solução analítica da EDP de ordem fracionária, Eq.(5).



Uma vez que a solução da equação de difusão fracionária Eq.(4) é dada pela Eq.(5), tomando o limite $\mu \to 1$, segue que

$$
\begin{aligned}
C\left(x,t\right) \;=\;& \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{D_L t}}\right)-\frac{\exp\left(-\sqrt{\frac{k-a}{D}}x\right)}{k\left(\frac{D_L}{D}\right)+a\left(1-\frac{D_L}{D}\right)}\left(\exp\left(\left(\frac{k-a}{D}\right)D_L t\right)-\exp\left(-at\right)\right)+\\
&+\frac{\exp\left(\left(\frac{k-a}{D}\right)D_L t\right)}{2\left[k\left(\frac{D_L}{D}\right)+a\left(1-\frac{D_L}{D}\right)\right]}\left[\begin{array}{c}\exp\left(\sqrt{\frac{k-a}{D}}x\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{x+2D_L t\sqrt{\frac{k-a}{D}}}{2\sqrt{D_L t}}\right)\\ +\exp\left(-\sqrt{\frac{k-a}{D}}x\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{x-2D_L t\sqrt{\frac{k-a}{D}}}{2\sqrt{D_L t}}\right)\end{array}\right]-\\
&-\frac{\exp\left(-at\right)}{2\left[k\left(\frac{D_L}{D}\right)+a\left(1-\frac{D_L}{D}\right)\right]}\left[\begin{array}{c}\exp\left(\frac{i\sqrt{a}x}{\sqrt{D_L}}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{x+2it\sqrt{D_L a}}{2\sqrt{D_L t}}\right)\\ +\exp\left(-\frac{i\sqrt{a}x}{\sqrt{D_L}}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{x-2it\sqrt{D_L a}}{2\sqrt{D_L t}}\right)\end{array}\right],
\end{aligned}
\tag{6}
$$

que é exatamente o resultado obtido em.

Por outro lado, podemos inferir considerações no caso de, também fracionalizar-se a parte espacial. Para introduzir a equação de difusão espaço-fracionário, utilizamos a derivada fracionária no sentido de Riesz [1], isto é,

$$\mathscr{F}[R_x^\alpha f(x)] = -\left|\omega\right| F(\omega), \tag{7}$$

com $0 < \omega < 2$.

A partir da Eq.(7), segue-se que o modelo matemático espaço-fracionário é composto por uma equação de difusão fracionária não homogênea

$$D_L \mathcal{D}_x^\beta C\left(x,t\right) - \mathcal{D}_t C\left(x,t\right) = \exp\left(-\left(at+bx\right)\right), \quad a,b\in\mathbb{R}, \tag{8}$$

sendo $1 < \beta \leq 2$ o parâmetro relacionado a ordem da derivada e com condições inicial e de fronteira das pela Eq.(3).

Após uma breve introdução ao estudo da concentração de nutrientes no sangue, fator que interfere na ESR, por meio de um modelo matemático fracionário, aqui proposto, utilizando a derivada fracionária no sentido de Caputo, obtivemos sua solução analítica em termos da função de Mittag-Leffler e da função de Wright, a partir da metodologia da transformada de Laplace na variável temporal t. Aqui, foi possível recuperar a solução do caso inteiro, aplicando o limite $\mu \to 1$ à solução analítica, Eq.(5), da EDP fracionária, Eq.(4). Quanto ao que se esperava sobre a relação entre o modelo matemático fracionário em relação ao modelo de ordem inteira de, é que o nosso modelo fracionário fornece informações mais precisas sobre a concentração de nutrientes no sangue, devido a liberdade do parâmetro μ [3].

Referências

[1] I. Podlubny, Fractional Differential Equation Mathematics in Science and Engineering, **198**, Academic Press, San Diego, (1999).

[2] G. C. Sharma, M. Jain and R. N. Saral, *A mathematical model for concentration of blood affecting erythrocyte sedimentation*, **26**, 1-7. Comput. Biol. Med., 1996.

[3] J. Vanterler da C. Sousa, E. Capelas de Oliveira and L. A. Magna, *Fractional Calculus and the ESR test*, submitted, (2016).

Palavras-chave: *Cálculo Fracionário. ESR. EDP tempo-fracionária. Função de Mittag-Leffler. Função de Wright.*